全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

# 全品学练考

AI智慧教辅

主编 肖德好

## 导学案

## 高中数学

必修第四册 RJB

本书为AI智慧教辅

“讲课智能体”支持学生聊着学，扫码后哪里不会选哪里；随时随地想聊就聊，想问就问。

江西美术出版社
全国百佳图书出版单位

CONTENTS 目录 导学案

# 11 第十一章　立体几何初步

PART ELEVEN

# 第九章　解三角形

## 9.1　正弦定理与余弦定理

### 9.1.1　正弦定理

#### 第 1 课时　正弦定理（一）

【学习目标】

1. 结合实例，了解已知两边和其夹角的三角形面积公式的推理过程，掌握三角形面积公式的应用；

2. 了解正弦定理的推导过程，通过转化、构造归纳出正弦定理，掌握正弦定理及其变形，培养逻辑推理素养和数学运算素养；

3. 能用正弦定理解三角形，并能判断三角形解的个数.

**课前预习**　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　正弦定理**

**1.** 正弦定理的推导

一般地，若记 $\triangle ABC$ 的面积为 $S$，则 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=$______$=$______. 由此可知 $\frac{2S}{abc}=\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$，又因为 $\sin A>0$，$\sin B>0$，$\sin C>0$，因此可得 $\frac{a}{\sin A}=$______$=$______.

**2.** 正弦定理

| | |
|---|---|
| 文字语言 | 在一个三角形中，各边的长和它所对角的______的比相等 |
| 符号语言 | 在$\triangle ABC$ 中，$a,b,c$ 分别为内角 $A,B,C$ 的对边，则有$\frac{a}{\sin A}=$______$=$______ |

**3.** 正弦定理的变形

(1) $a:b:c=$______.

(2) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=$______.

**4.** 习惯上，我们把三角形的 3 个角与 3 条边都称为三角形的______，已知三角形的若干元素求其他元素一般称为______.

【诊断分析】判断下列说法的正误.（正确的打“√”，错误的打“×”）

(1)正弦定理适用于任意三角形.　（　）

(2)在$\triangle ABC$ 中，等式 $b\sin A=a\sin B$ 总能成立.　（　）

(3)在$\triangle ABC$ 中，“$a>b$”是“$\sin A>\sin B$”的充分不必要条件.　（　）

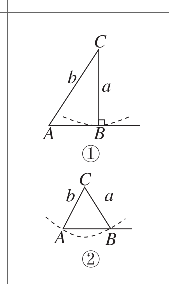
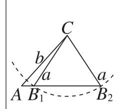
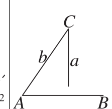
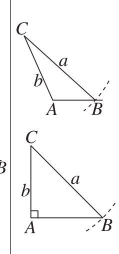
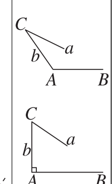
◆ **知识点二　利用正弦定理解三角形**

**1.** 利用正弦定理主要解答如下两种求解三角形的问题：

(1)已知三角形的两角和一边，求______；

(2)已知三角形的两边和其中一边的对角，求______.

**2.** 已知 $a,b$ 和 $A$，用正弦定理求 $B$ 时的各种情况如下：

| | $A$ 为锐角 | | | $A$ 为钝角或直角 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 图形 |  |  |  |  |  |
| 关系式 | ①$a=b\sin A$ 且 $a<b$；②$a\geqslant b$ | $b\sin A<a<b$ | $a<b\sin A$ | $a>b$ | $a\leqslant b$ |
| 解的个数 | 一解 | 两解 | 无解 | 一解 | 无解 |

**【诊断分析】** 判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)在$\triangle ABC$中,已知$a,b,A$,则能求出唯一的角$B$. ( )

(2)在$\triangle ABC$中,$a=8,b=16,A=30°$,有两解. ( )

(3)任意给出三角形的三个元素,都能求出其余元素. ( )

## 课中探究

考点探究 素养小结

### ◆ 探究点一 已知两角及一边解三角形

**[探索]** 已知两角及一边,三角形的形状能确定吗?

---

---

**例1** 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$,已知$a=10,A=30°,C=45°$,求角$B$及边$b,c$.

**变式** 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$.若$A=\frac{\pi}{4}$,$\cos B=\frac{3}{5}$,$c=7$,则$a=$________.

**[素养小结]**

(1)当三角形的两角及一边确定时,三角形的形状是唯一的,解三角形的结果也是唯一的.

(2)已知两角和任意一边,在解三角形时,可直接利用正弦定理求得边的长,要注意结合三角形的内角和为180°.

①若所给边是已知角的对边,则可由正弦定理求另一角所对的边,由三角形内角和定理求出第三个角,再由正弦定理求第三边.

②若所给边不是已知角的对边,则先由三角形内角和定理求出第三个角,再由正弦定理求另外两边.

### ◆ 探究点二 已知两边及一边的对角解三角形

**[探索]** 判断满足条件$A=30°,a=1,c=4$的$\triangle ABC$是否存在,并说明理由.

---

---

**例2** 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$,若$B=\frac{\pi}{6}$,$b=\sqrt{3}$,$a=3$,则$c=$ ( )

A. $\sqrt{3}$或$2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$或3

C. $\sqrt{3}$或3　　D. 3

**变式** [2024·广东东莞高一期末] 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$,若$c=\sqrt{6}$,$A=45°,a=2$,解这个三角形.

**[素养小结]**

当已知三角形的两边和其中一边的对角时解三角形的方法与步骤:

(1)首先由正弦定理求出另一边对角的正弦值.

(2)如果已知的角为大边所对的角,由三角形中"大边对大角,大角对大边"的法则能判断另一边所对的角为锐角,由正弦值可求唯一锐角.

(3)如果已知的角为小边所对的角,则不能判断另一边所对的角是否为锐角,这时由正弦值可求得两个角,要分类讨论.

(4)然后由三角形内角和定理求出第三个角,再根据正弦定理求出第三边.

**拓展** (1)[2024·江苏镇江中学高一月考] 在$\triangle ABC$中,$A=30°,AB=4$,满足此条件的$\triangle ABC$有两个,则边$BC$的长度的取值范围为 ( )

A. $(2\sqrt{3},4)$　　B. $(2,4)$

C. $(4,+\infty)$　　D. $(2,2\sqrt{3})$

(2)[2024·郑州外国语学校高一月考] 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$,若$a=1$,$\cos A=\frac{\sqrt{15}}{4}$,$b=x$,三角形有唯一解,则整数$x$的取值集合为 ( )

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{1,4\}$　　D. $\{1,2,4\}$

### ◆ 探究点三　三角形的面积

**例 3** $\triangle ABC$的内角$A,B,C$所对的边分别为$a$,$b,c$,且$a=1,c=\sqrt{3},B=\frac{\pi}{6}$,则$\triangle ABC$的面积为 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{4}$

**变式** 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$,若$\triangle ABC$的面积为$S$,$a=4\sqrt{3}$,$b=12$,$S=\frac{\sqrt{3}}{2}ac\cos B$,则$A=$ ( )

A. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

[素养小结]

(1)求三角形的面积时通常以角为主,即在题目中已知哪个角或者涉及哪个角就以含有该角的公式进行面积求解.

(2)在解三角形问题时需要根据正弦定理结合已知条件灵活转化边和角之间的关系,从而达到解决问题的目的.

## 课堂评价

知识评价　素养形成

**1.** 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$,已知$a=8,B=60°,C=75°$,则$b=$ ( )

A. $4\sqrt{2}$　B. $4\sqrt{3}$　C. $4\sqrt{6}$　D. $4$

**2.** [2024·广州高一期末] 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$,若$B=30°,b=2$,$c=2\sqrt{2}$,则角$A$的大小为 ( )

A. $45°$　　B. $135°$或$45°$

C. $15°$　　D. $105°$或$15°$

**3.** 已知$\triangle ABC$的内角$A,B,C$的对边分别为$a$,$b,c$,若$a=1,b+c=2,A=\frac{\pi}{4}$,则$\sin B+\sin C=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　C. $1$　D. $\sqrt{2}$

**4.** 在$\triangle ABC$中,$A=60°,AC=4,BC=2\sqrt{3}$,则$\triangle ABC$的面积为________.

**5.** 若$a,b,c$分别是$\triangle ABC$的三个内角$A,B,C$的对边,且$C=\frac{\pi}{4},\sqrt{3}c=\sqrt{2}a$,则$B=$________.

# 第2课时　正弦定理(二)

【学习目标】

**1.** 熟记并能应用正弦定理的有关变形公式以及边角互化判断三角形的形状;

**2.** 能利用正弦定理、三角恒等变换、三角形面积公式解决较为复杂的三角形问题;

**3.** 通过边角解三角形及证明问题,培养逻辑推理素养和数学运算素养.

## 课前预习

知识导学　素养初识

### ◆ 知识点一　正弦定理的边角转换

**1.** 边转换成角

$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$($R$为$\triangle ABC$外接圆的半径).

**2.** 角转换成边

$\sin A=\frac{a}{2R},\sin B=\frac{b}{2R},\sin C=\frac{c}{2R}$($R$为$\triangle ABC$外接圆的半径).

**【诊断分析】** 在正弦定理中,设$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$,求证:$k$为$\triangle ABC$外接圆的直径.

◆ **知识点二　三角形的分类**

**1.** 根据最大角，可分为________、________和________.

**2.** 根据两边(或两角)的关系，又可分为等腰三角形或非等腰三角形. 等腰三角形的特例是等边三角形、等腰直角三角形.

**【诊断分析】** 在$\triangle ABC$中，已知$\sin 2A=\sin 2B$，你能推断出$\triangle ABC$是什么三角形吗?

## 课中探究

考点探究　素养小结

◆ **探究点一　利用正弦定理判断三角形的形状**

**例1** (1)［2024·黑龙江绥化高一期末］设$\triangle ABC$的内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，若$a\cos A=b\cos B=c\cos C$，则$\triangle ABC$的形状是 (　　)

A. 直角三角形

B. 等边三角形

C. 钝角三角形

D. 三边比为1∶2∶3的三角形

(2)在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，已知$a^2\tan B=b^2\tan A$，则$\triangle ABC$的形状是 (　　)

A. 锐角三角形

B. 直角三角形

C. 钝角三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

**变式** (1)在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，若$c-a\cos B=(2a-b)\cos A$，则$\triangle ABC$的形状为 (　　)

A. 等边三角形

B. 直角三角形

C. 等腰三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

(2)已知$\triangle ABC$的内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，$\triangle ABC$的面积为$S$，若$a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$，$6S=\sqrt{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，则$\triangle ABC$的形状是 (　　)

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

**[素养小结]**

(1)判断三角形的形状，可以从三边的关系入手，也可以从三个内角的关系入手，从条件出发，利用正弦定理进行代换、转化，呈现出边与边的关系或求出角与角的关系或大小，从而作出准确判断.

(2)利用正弦定理把已知条件转化为内角的三角函数间的关系，通过三角恒等变换得出内角的关系，从而判断出三角形的形状，此时要注意应用$A+B+C=\pi$这个结论. 在等式变形中，一般两边不要约去公因式，应移项提取公因式，以免漏解.

(3)判断三角形的形状，主要看是否是正三角形、等腰三角形、直角三角形、钝角三角形或锐角三角形，要特别注意“等腰直角三角形”与“等腰三角形或直角三角形”的区别.

◆ **探究点二　利用正弦定理求最值或取值范围**

**例2** ［2024·浙江宁波高一期末］在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，若$A,B$都是锐角，$C=\dfrac{\pi}{3}$，$c=2$，求$\triangle ABC$的周长的取值范围.

**变式** 设锐角三角形 $ABC$ 的三个内角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，若 $a=2,B=2A$，则 $b$ 的取值范围是 ( )

A. $(\sqrt{2},2)$　　B. $(\sqrt{2},\sqrt{3})$

C. $(2\sqrt{2},2\sqrt{3})$　　D. $(0,2)$

[素养小结]

解决三角形中的取值范围或最值问题的一般步骤：

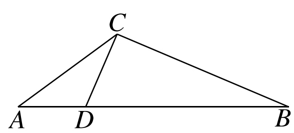
(1)利用正弦定理理清三角形中元素间的关系或求出某些元素.

(2)将所求最值或取值范围的量表示成某一变量的三角函数，从而转化为三角函数的取值范围或最值问题.

**拓展** 在△$ABC$ 中，内角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，若△$ABC$ 为锐角三角形，且满足 $c=2a\cos B+a$，则 $\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{\tan B}$ 的取值范围是________.

### ◆ 探究点三　利用正弦定理证明问题

**例 3** 如图，在△$ABC$ 中，点 $D$ 在边 $AB$ 上，且 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$. 记 $\angle ACD=\alpha$，$\angle BCD=\beta$. 求证：$3AC\cdot\sin\alpha=BC\cdot\sin\beta$.




**变式** 在△$ABC$ 中，点 $D,E$ 都在边 $BC$ 上且与 $B,C$ 不重合，点 $D$ 在 $B,E$ 之间，$\angle BAD=\angle CAE$，$AB\perp AC$. 求证：$\frac{AD^2}{BD^2}+\frac{AE^2}{CE^2}=\frac{2}{1-\sin\angle DAE}$.

[素养小结]

(1)利用正弦定理解决三角形中的证明问题，主要是观察条件，找出边角的关系，化为同角或同边，结合函数的思想解决.

(2)证明三角形中的恒等式的方法与证明一般的三角恒等式类似，可从左边证到右边，也可从右边证到左边，也可左右归一.

## 课堂评价

知识评价　素养形成

**1.** 在△$ABC$ 中，内角 $A,B,C$ 所对的边分别是 $a,b,c$，若 $b=2a\cos C$，则△$ABC$ 的形状为 ( )

A. 等腰三角形　　B. 等边三角形

C. 锐角三角形　　D. 钝角三角形

**2.** [2024·山东菏泽高一月考] 已知 $a,b,c$ 分别是△$ABC$ 的内角 $A,B,C$ 的对边，若△$ABC$ 的周长为 $4(\sqrt{2}+1)$，且 $\sin B+\sin C=\sqrt{2}\sin A$，则 $a=$ ( )

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. 4　　D. $2\sqrt{2}$

**3.** 在△$ABC$ 中，内角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，$S$ 表示△$ABC$ 的面积，若 $c\cos B+b\cos C=2a\sin A$，$S=\frac{\sqrt{3}}{2}ab\cdot\cos C$，则 $B=$ ( )

A. $30°$　　B. $90°$

C. $45°$　　D. $60°$

**4.** 在△$ABC$ 中，内角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，若 $A:B:C=4:1:1$，则 $a:b:c=$ ( )

A. $3:1:1$　　B. $2:1:1$

C. $\sqrt{2}:1:1$　　D. $\sqrt{3}:1:1$

**5.** 已知锐角三角形 $ABC$ 的外接圆的半径为 1，内角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，若 $B=\frac{\pi}{4}$，则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围是__________.

# 9.1.2 余弦定理

## 第1课时 余弦定理

【学习目标】

1. 能够借助向量的运算探索三角形边长与角度的关系，通过用向量推导余弦定理，提升逻辑推理素养；
2. 掌握余弦定理及其变形形式，运用余弦定理及变形求解三角形问题，提升数学运算素养.

**课前预习** 知识导学 素养初识

### ◆ 知识点一 余弦定理

| | |
|---|---|
| 文字语言 | 三角形任何一边的________等于其他两边的________减去这两边与它们夹角____________的2倍 |
| 符号语言 | $a^2=$____________，$b^2=$____________，$c^2=$____________ |
| 变形形式 | $\cos A=$____________，$\cos B=$____________，$\cos C=$____________ |

【诊断分析】判断下列说法的正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)余弦定理反映了任意三角形边角之间的关系，因此它适用于任何三角形. ( )

(2)在三角形中，勾股定理是余弦定理的一个特例. ( )

(3)在$\triangle ABC$中，已知$A=60°$，$b=2$，$c=1$，则$a=\sqrt{3}$. ( )

### ◆ 知识点二 利用余弦定理解三角形

利用余弦定理主要解答如下两种解三角形的问题：

(1)已知三角形的两边和一个角，求____________；

(2)已知三角形的三边，求____________.

【诊断分析】判断下列说法的正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)若$b^2+c^2-a^2=0$，则$A=90°$. ( )

(2)在$\triangle ABC$的六个元素中，已知任意三个元素可求其他元素. ( )

(3)在$\triangle ABC$中，已知两边及夹角时，$\triangle ABC$不一定唯一. ( )

(4)若在三角形中，已知两边及一边的对角，则这样的三角形唯一确定. ( )

**课中探究** 考点探究 素养小结

### ◆ 探究点一 已知三角形两边及其一角解三角形

**例1** 在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，根据下列条件解三角形.

(1)$a=2$，$b=2\sqrt{2}$，$C=15°$；

(2)$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=45°$.

**变式** [2025·福建莆田高一期中] 在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，$a=6$，$b-c=1$，$\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$，求$b$的值及$\triangle ABC$的面积.

[素养小结]

已知三角形两边及其一角解三角形有以下两种情况：

(1)已知两边和两边夹角，直接应用余弦定理求出第三边，然后根据边角关系应用正弦定理或余弦定理求解.

(2)已知两边和一边的对角，有两种解法.解法一：利用余弦定理列出关于第三边的等量关系建立方程，运用解方程的方法求出第三边的长，这样可免去判断取舍的麻烦；解法二：直接运用正弦定理，先求角再求边，需讨论.

### ◆ 探究点二　已知三边解三角形

[探索] 在前面我们所解的三角形问题中，已知条件中都至少含有一个角，若已知三角形的三边，能否解此三角形？你能给出具体解决方法吗？

......................................................................

......................................................................

......................................................................

**例 2** (1)在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，已知$a=3,b=\sqrt{7},c=2$，则角$B$的大小为________.

(2)在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，已知$a=7,b=8,c=5$，则最大角与最小角的和为________.

**变式** 在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，已知$a:b:c=3:5:7$，则这个三角形的最大角的弧度数为　　(　　)

A. $\frac{5\pi}{6}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

[素养小结]

已知三角形的三边解三角形的方法：

(1)先利用余弦定理的变形形式求出其中两个角的余弦值，从而求出两个角，再利用三角形的内角和定理求出第三个角.

(2)利用余弦定理的变形形式求出三个角的余弦值，进而求出三个角.

### ◆ 探究点三　判断三角形的形状

**例 3** (1)在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，若$\frac{1-\cos A}{1-\cos B}=\frac{a}{b}$，则$\triangle ABC$的形状为____________.

(2)在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$.若$2B=A+C,b^2=ac$，则$\triangle ABC$的形状为____________.

**变式** (1)[2024·沈阳二中高一月考] 在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，若$a-c\cos B=b-c\cos A$，则$\triangle ABC$的形状是　　(　　)

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰或直角三角形

(2)[2025·江苏盐城高一期中] 在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$.若$2\sin^2\frac{B}{2}=\frac{a-c}{a}$，则$\triangle ABC$一定是　　(　　)

A. 等边三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰三角形

[素养小结]

利用余弦定理判断三角形形状的两种途径

①先化边为角，再进行三角恒等变换，求出三角之间的数量关系；

②先化角为边，再进行代数恒等变换，求出三边之间的数量关系.

## 课堂评价

知识评价　素养形成

**1.** 在$\triangle ABC$中，$AB=2,BC=3,B=60°$，则$AC=$　　(　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{7}$

C. $\sqrt{10}$　　D. $\sqrt{13}$

**2.** 在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，若$b^2=ac$且$c=2a$，则$\cos B=$　　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

**3.** [2024·昆明一中高一月考] 在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，已知$a=b=1$，$c=\sqrt{3}$，则$\triangle ABC$的外接圆的面积为　　(　　)

A. $2\pi$　　B. $\sqrt{3}\pi$　　C. $\pi$　　D. $\sqrt{2}\pi$

4. [2025·福建三明高一期中] 在$\triangle ABC$中，“$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2<|\overrightarrow{AC}|^2$”是“$\triangle ABC$为钝角三角形”的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 在$\triangle ABC$中，$a,b,c$分别为内角$A,B,C$的对边，$b=\sqrt{2}$，$c=1+\sqrt{3}$，且$a^2=b^2+c^2-2bc\sin A$，则$a=$________.

## 第2课时 正、余弦定理解三角形

【学习目标】

能利用正、余弦定理、三角恒等变换、三角形面积公式解决较为复杂的三角形问题.

### 课前预习

知识导学 素养初识

#### ◆ 知识点 三角形中边与角之间的关系

1. 在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$.

(1)若$a^2>b^2+c^2$，则$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<0$，$\triangle ABC$为________三角形；

(2)若$a^2=b^2+c^2$，则$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0$，$\triangle ABC$为________三角形；

(3)若$a^2<b^2+c^2$且$b^2<a^2+c^2$且$c^2<a^2+b^2$，则$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}>0$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$，$\triangle ABC$为________三角形.

2. 射影定理

在$\triangle ABC$中，

①$b\cos C+c\cos B=$________；

②$c\cos A+a\cos C=$________；

③$a\cos B+b\cos A=$________.

### 课中探究

考点探究 素养小结

#### ◆ 探究点一 利用正、余弦定理解三角形

**例1** [2024·河南濮阳高一期末] 在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，已知$c(\cos A+1)=\sqrt{3}a\sin C$.

(1)求角$A$的大小；

(2)若$\triangle ABC$的面积为$9\sqrt{3}$，周长为18，求$a$的值.

**变式** 已知$a,b,c$分别为$\triangle ABC$的三个内角$A,B,C$的对边，且$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-2c=0$.

(1)求$A$；

(2)若$a=2$，且$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，求$b,c$.

[素养小结]

(1)一般地,如果遇到的式子含角的余弦或是边的二次式,要考虑用余弦定理;如果遇到的式子含角的正弦或是边的一次式,则大多用正弦定理;如果以上特征不明显,则两个定理都有可能用.

(2)正、余弦定理是解决三角形问题的两个重要工具,这类题目往往结合基本的三角恒等变换,同时注意三角形中的一些重要性质,如内角和为 $180°$、大边对大角等.

**拓展** 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$,$\triangle ABC$的面积记为$S$,且满足$a^2+b^2-c^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S$.

(1)求$C$;

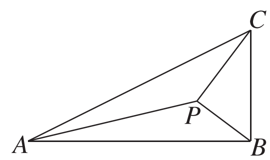
(2)若$c=\sqrt{3}$,求$2a-4\sin B$的取值范围.

### ◆ 探究点二　正、余弦定理在平面几何中的应用

**例 2** 如图,在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=90°$,$AB=10$,$BC=5$,$P$为$\triangle ABC$内一点,且$\angle BPC=90°$.

(1)若$PB=3$,求$PA$的长;

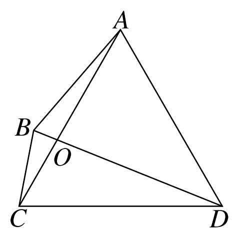
(2)若$\angle APB=150°$,求$\tan\angle PBA$.




**变式** [2024·河北武邑中学高一月考] 如图所示,在平面四边形$ABCD$中,$\angle ABC=150°$,$\angle ACD=60°$,$AB=\sqrt{3}$,$BC=1$,$CD=\sqrt{7}$.

(1)求$BD$的长;

(2)若$AC$与$BD$交于点$O$,求$\triangle AOD$的面积.




[素养小结]

运用正、余弦定理求解三角形时,很重要的一步是找所求的边或角所在的三角形,若所求的边或角所属的三角形不只一个,则要选用已知条件较多的三角形进行求解.

## ◆ 探究点三　证明三角形中的恒等式

**例3** 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$.求证:

(1)$\frac{\tan A}{\tan C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}$;

(2)$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

**变式** 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$.已知$BM$是$AC$边上的中线,求证:$BM=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$.

[素养小结]

(1)证明三角恒等式的关键是消除等号两端三角函数式的差异.形式上一般有:左⇒右、右⇒左或左⇒中⇐右三种.

(2)利用正、余弦定理证明三角形中的恒等式的途径有两种:一是把角的关系通过正、余弦定理转化为边的关系;二是把边的关系通过正弦定理转化为角的关系.

## 课堂评价

知识评价　素养形成

**1.** 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$,若$\triangle ABC$的面积为$S$,且$4S=b^2+c^2-a^2$,则$A=$ (　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

**2.** [2024·江苏苏州高一期末] 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$,若$(a+c)(a-c)=b(b-\sqrt{3}c)$,则$A=$ (　　)

A. $90^\circ$　　B. $30^\circ$

C. $60^\circ$　　D. $150^\circ$

**3.** [2024·重庆巴蜀中学高一月考] 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$,若$A=60^\circ$,$b=2$,且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$,则$\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=$ (　　)

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{21}}{3}$

**4.** 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$,若$\lg\sin A-\lg\cos B-\lg\sin C=\lg 2$,则$\triangle ABC$的形状是 (　　)

A. 直角三角形

B. 等腰直角三角形

C. 等边三角形

D. 等腰三角形

**5.** 已知$a,b,c$分别为$\triangle ABC$的三个内角$A,B,C$的对边,若$c=3$,$(\sin C-\sin B)(b+3)=(a+b)\sin A$,则$\triangle ABC$的面积的最大值为________.

# 9.2　正弦定理与余弦定理的应用

【学习目标】

**1.** 结合实例，理解测量不便到达的两点之间的距离的方案，掌握正、余弦定理在测量高度方面的应用；

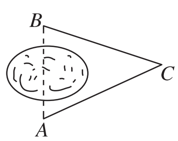
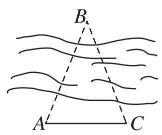
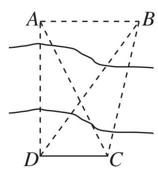
**2.** 掌握数学建模的应用，理解正、余弦定理在测量距离与角度等方面的应用，通过实际问题的解决，培养数学建模素养，提升数学抽象素养和数学运算素养.

## 课前预习

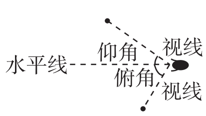
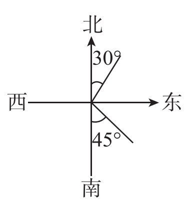
知识导学　素养初识

### ◆ 知识点一　测量距离问题

测量距离的基本类型及求解的方法

| 类型 | 两点都可从另一点到达 | 两点中一点不可到达 | 两点都不可到达 |
|---|---|---|---|
| 图形 |  |  |  |
| 方法 | 余弦定理 | 正弦定理 | 先用正弦定理，再用余弦定理 |

### ◆ 知识点二　与测量有关的角的概念

| 术语 | 定义 | 图形说明 |
|---|---|---|
| 仰角与俯角 | 在同一铅垂面内，视线与水平线所成的角中，______的角叫仰角，______的角叫俯角 |  |
| 方向角 | 从指定方向线（常从指北或指南方向线）旋转到目标方向线所成的______，叫作方向角. 如图，方向角分别为北偏东 30°，______ |  |

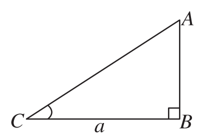
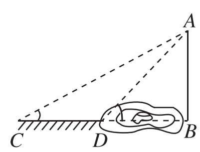
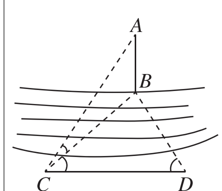
【诊断分析】判断下列说法的正误.（正确的打“√”，错误的打“×”）

(1)两个不可到达的点之间的距离无法求得.（　）

(2)小强站在地面上观测一座建在山顶上的建筑物，测得其视角(建筑物的上、下两端)为 $\alpha$，同时测得该建筑物顶部的仰角为 $\beta$，则小强观测山顶的仰角为 $\beta-\alpha$.（　）

(3)俯角是铅垂线与视线所成的角，其范围为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.（　）

### ◆ 知识点三　测量高度问题

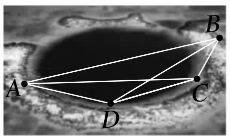
| 类型 | | 简图 | 计算方法 |
|---|---|---|---|
| 底部可达 | |  | 测得 $BC=a$ 及 $C$ 的度数，$AB=a\cdot\tan C$ |
| 底部不可达 | 点 $B$ 与 $C$，$D$ 共线 |  | 测得 $CD$ 的长度及 $C$ 与 $\angle ADB$ 的度数. 先由正弦定理求出 $AD$ 的长度，再解直角三角形得 $AB$ 的长度 |
| | 点 $B$ 与 $C$，$D$ 不共线 |  | 测得 $CD$ 的长度及 $\angle BCD$，$\angle BDC$，$\angle ACB$ 的度数. 在 $\triangle BCD$ 中由正弦定理求出 $BC$ 的长度，再解直角三角形得 $AB$ 的长度 |

## 课中探究

考点探究　素养小结

### ◆ 探究点一　测量距离问题

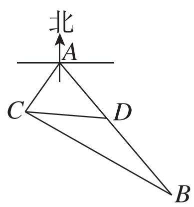
**例 1**　海洋蓝洞是地球罕见的自然地理现象，被喻为“地球给人类保留宇宙秘密的最后遗产”，我国拥有世界上已知最深的海洋蓝洞. 若要测量如图所示的蓝洞的口径 $A$，$B$ 两点间的距离，现在珊瑚群岛上取两点 $C$，$D$，测得 $CD=60$ m，$\angle ADB=135°$，$\angle BDC=\angle DCA=15°$，$\angle ACB=120°$，则 $A$，$B$ 两点间的距离为　（　）




A. $30\sqrt{3}$ m　　B. $60\sqrt{2}$ m

C. $60\sqrt{3}$ m　　D. $60\sqrt{5}$ m

**变式**　如图，观测站 $C$ 在目标 $A$ 的南偏西 35°方向，经过 $A$ 处有一条南偏东 40°走向的公路，在 $C$ 处观测到与 $C$ 相距 $10\sqrt{10}$ km 的 $B$ 处有一人正沿此公路向 $A$ 处行走，走 20 km 到达 $D$ 处，此时测得 $C$，$D$ 之间的距离为 $10\sqrt{2}$ km，求 $D$，$A$ 两点间的距离.




[素养小结]

三角形中与距离有关的问题的求解策略

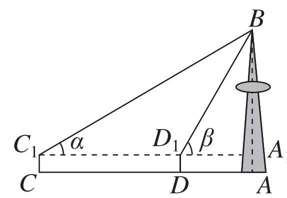
(1)解决三角形中与距离有关的问题：若在一个三角形中，则直接利用正、余弦定理求解；若所求的线段在多个三角形中，要根据条件选择适当的三角形，再利用正、余弦定理求解.

(2)解决三角形中与距离有关的问题的关键是转化为求三角形中的边，分析所解三角形中已知哪些元素，还需要求出哪些元素，灵活应用正、余弦定理来解决.

### ◆ 探究点二　测量高度问题

[探索] 测量某一物体的高度时，利用正弦定理求解需要哪些条件？

**例 2**　如图所示，$C$，$D$，$A$ 三点在同一水平线上，$AB$ 是塔的中轴线，在 $C_1$，$D_1$ 两处测得塔顶部 $B$ 处的仰角分别是 $\alpha$，$\beta$，且 $\alpha=30°$，$\beta=60°$，如果 $C$，$D$ 之间的距离是 20 m，测角仪 $CC_1=DD_1=1.5$ m，则塔高为(精确到 0.1 m)　（　）

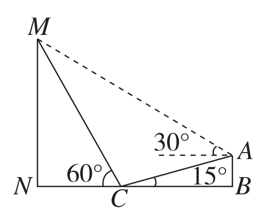



A. 18.8 m　　B. 10.2 m

C. 11.5 m　　D. 21.5 m

**变式**　[2025 · 天津滨海新区高一期中] 如图①，山西应县木塔建于公元 1056 年，是世界上现存最高大、最古老的纯木结构楼阁式建筑，与意大利的比萨斜塔、法国巴黎的埃菲尔铁塔并称“世界三大奇塔”. 如图②，某同学为了估算木塔的高度 $MN$，他在塔的附近找到一座建筑物 $AB$，$AB$ 的高为 14 m，在地面上点 $C$ 处($B$，$C$，$N$ 在同一水平面上且三点共线)测得木塔顶部 $M$，建筑物顶部 $A$ 的仰角分别为 60°和 15°，在 $A$ 处测得木塔顶部 $M$ 的仰角为 30°，则估计木塔的高度为　（　）


①



②

A. $(14+42\sqrt{2})$ m　　B. $(42+14\sqrt{2})$ m

C. $(14+42\sqrt{3})$ m　　D. $(42+14\sqrt{3})$ m

[素养小结]

测量高度的两类问题：

(1)测量底部可到达的物体的高度，此类问题可直接构造直角三角形进行求解.

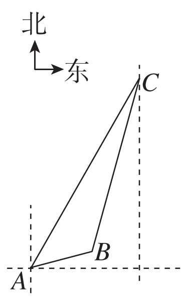
(2)测量底部不可到达的物体的高度，由于底部不可到达，这类问题不能直接用解直角三角形的方法解决，但常用正弦定理或余弦定理计算出物体顶部或底部到一个可到达的点之间的距离，然后转化为解直角三角形的问题.

### ◆ 探究点三　测量角度问题

**例3** 在某片海域上，一艘海上护卫舰位于点 $A$ 处，一艘货轮在点 $A$ 东偏北 $15°$ 方向的点 $B$ 处行驶着，通过雷达监测，发现在点 $A$ 北偏东 $30°$ 方向且距离点 $A$ 处 24 海里的点 $C$ 处出现一艘海盗船，此时海盗船与货轮相距 $8\sqrt{6}$ 海里，且护卫舰距离货轮比距离海盗船更近.

(1)求发现海盗船时护卫舰与货轮的距离；

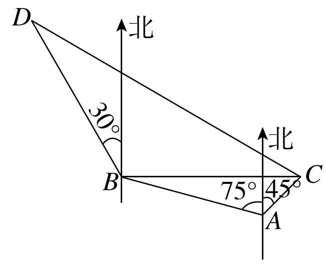
(2)为确保货轮的安全，护卫舰开始以 $20\sqrt{3}$ 海里/时的速度追击海盗船，与此同时，海盗船开始以 20 海里/时的速度沿着北偏西 $30°$ 方向逃窜，求护卫舰能追捕到海盗船的最短时长以及最佳追击方向.




**变式** [2024·郑州高一期末] 在海岸 $A$ 处发现北偏西 $75°$的方向上与 $A$ 处相距 2 海里的 $B$ 处有一艘渔船甲，在 $A$ 处北偏东 $45°$的方向上与 $A$ 处相距$(\sqrt{3}-1)$海里的 $C$ 处有一艘渔船乙以 $10\sqrt{3}$ 海里/时的速度向渔船甲进行靠拢，此时渔船甲正以 10 海里/时的速度从 $B$ 处向北偏西 $30°$的方向航行.

(1)刚发现渔船甲时，渔船乙距离渔船甲多远？在渔船甲的什么方向？

(2)渔船乙沿什么方向能最快追上渔船甲？




[素养小结]

(1)测量角度问题的关键是在弄清题意的基础上画出表示实际问题的图形，并在图形中标出有关的角和距离，再用正弦定理或余弦定理解三角形，最后将解得的结果转化为实际问题的解.

(2)方向角是相对于某点而言的，因此在确定方向角时，必须先弄清楚是哪一个点的方向角.

## 课堂评价

知识评价　素养形成

**1.** [2025·江西南昌高一期中] 两座灯塔 $A$ 和 $B$ 与海岸观察站 $C$ 的距离相等，灯塔 $A$ 在观察站北偏东 $40^\circ$方向，灯塔 $B$ 在观察站南偏东 $60^\circ$方向，则灯塔 $A$ 在灯塔 $B$ 的　(　　)

A. 北偏东 $10^\circ$　　B. 北偏西 $10^\circ$

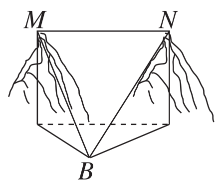
C. 南偏东 $10^\circ$　　D. 南偏西 $10^\circ$

**2.** 某船从 $A$ 处向北偏东 $60^\circ$方向航行 $2\sqrt{3}$ 千米后到达 $B$ 处，然后朝南偏西 $30^\circ$方向航行 6 千米到达 $C$ 处，则 $A$ 处与 $C$ 处之间的距离为　(　　)

A. $\sqrt{3}$ 千米　　B. $2\sqrt{3}$ 千米

C. 3 千米　　D. 6 千米

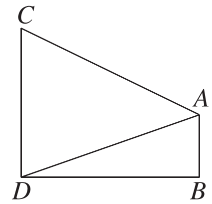
**3.** 如图，已知某景区两座主峰的高度都是 200 m，某测量团队在 $B$ 点测得左侧主峰顶端 $M$ 点的仰角为 $30^\circ$，右侧主峰顶端 $N$ 点的仰角为 $45^\circ$，且 $\angle MBN=45^\circ$，则两座主峰顶端之间的距离 $MN=$　(　　)




A. 200 m　　B. 400 m

C. $200\sqrt{2}$ m　　D. $400\sqrt{2}$ m

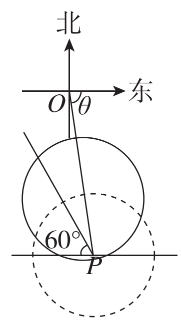
**4.** 如图，两座相距 60 m 的建筑物 $AB$，$CD$ 的高度分别为 20 m，50 m，$B$，$D$ 在同一水平面上，则从建筑物 $AB$ 的顶端 $A$ 处看建筑物 $CD$ 的张角为　(　　)




A. $30^\circ$　　B. $45^\circ$

C. $60^\circ$　　D. $75^\circ$

**5.** [2025·重庆八中高一月考] 据监测，某台风中心位于某海滨城市 $O$(如图)的东偏南 $\theta\left(\cos\theta=\frac{1}{7}\right)$方向相距 350 km 的海面 $P$ 处，并以 20 km/h 的速度向西偏北 $60^\circ$方向移动，台风侵袭的范围为圆形区域，当前半径为 130 km，并以 10 km/h 的速度不断增大，则________小时后该海滨城市开始受到台风侵袭.




# 9.3 数学探究活动：得到不可达两点之间的距离

通过前面的学习可以看出，借助米尺与测量角度的仪器可以得出不可达两点之间的距离，例如旗杆的高度、两建筑物上给定两点之间的距离等，都可以借助解三角形的知识得出. 请与其他同学分工合作，利用工具测量有关数据，解决以下问题.

**1.** 活动背景介绍与要求

(1)在北京故宫的四个角上各矗立着一座角楼，如何通过测量求得角楼的高度？(精确到 0.1 m)

(2)通过探究，学生经过自己的数学活动，从实际问题中提取数学模型，使学生经历发现和创造的过程，进一步拓展学生的数学学习空间，发展学生"用数学"的意识.

活动过程中要制作以下表格，并如实填写.

得到不可达两点之间的距离活动记录表

| (1)成员与分工 | |
|---|---|
| 姓名 | 分工 |
| | |
| | |
| | |
| (2)选定的不可达两点的状态描述(可附照片，下同) | |

(3)活动方案(包括测量原理、创新点描述等)

(4)活动工具描述(包括自制工具的制作步骤等)

(5)活动过程中记录的数据

(续表)

(6)根据数据计算结果

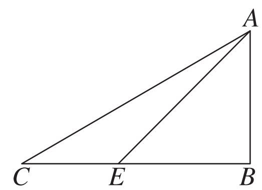
(7)活动总结(包括误差分析、活动感受等)

**2.** 活动提示:

活动过程中,务必注意安全.

为了得到不可达两点之间的距离,可借助的方法有很多.

例:如图,某人要测量顶部不能到达的电视塔 $AB$ 的高度,他在水平面的 $C$ 点测得塔顶 $A$ 的仰角是 $30°$,在 $E$ 点测得塔顶 $A$ 的仰角是 $45°$,并测得水平面上 $C$,$E$ 两点间的距离是 40 m,求电视塔 $AB$ 的高度.

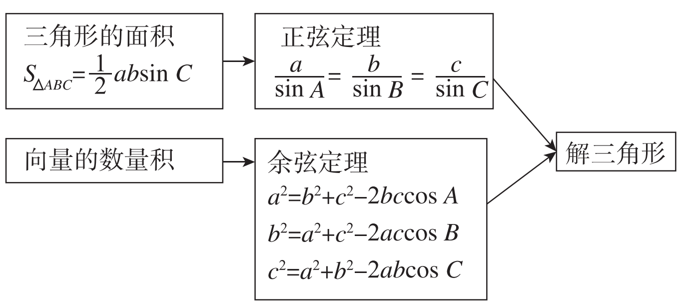



在这个过程中,要保证 $C$,$E$,$B$ 三点在一条直线上,而且 $AB$ 要与 $BC$ 垂直,否则误差会很大.

在实际生活中,有时并不能保证 $AB$ 与 $BC$ 垂直,可以进一步探讨此时怎样才能完成任务.

# 本章总结

## 知识网络




## 知识辨析

判断下列说法是否正确.(正确的打"√",错误的打"×")

**1.** 在$\triangle ABC$ 中,若 $\sin A>\sin B$,则 $A>B$. ( )

**2.** 在$\triangle ABC$ 中,若 $\sin^2A>\sin^2B+\sin^2C$,则$\triangle ABC$ 一定为钝角三角形. ( )

**3.** 从 $A$ 处望 $B$ 处的仰角为 $\alpha$,从 $B$ 处望 $A$ 处的俯角为 $\beta$,则 $\alpha+\beta=90°$. ( )

**4.** 若 $P$ 在 $Q$ 北偏东 $44°$的方向上,则 $Q$ 在 $P$ 东偏北 $44°$的方向上. ( )

**5.** 在三角形中,三边长分别为 5,6,7,则该三角形为钝角三角形. ( )

**6.** 若点 $A$ 在点 $C$ 北偏东 $30°$的方向上,点 $B$ 在点 $C$ 南偏东 $60°$的方向上,且 $AC=BC$,则点 $A$ 在点 $B$ 北偏西 $15°$的方向上. ( )

## 素养提升

### ◆ 题型一 应用正弦定理、余弦定理解三角形

[类型总述] (1)三角形基本量的计算;(2)周长、面积的计算;(3)判断三角形形状.

**例 1** (1)在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$,$a^2+c^2=b^2+ac$,则$\cos A+\cos C$的最大值为 ( )

A. 1　　B. 2

C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

(2)[2024·云南师大附中高一月考] 记$\triangle ABC$的内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$,分别以$a,b,c$为边长的正三角形的面积依次为$S_1,S_2,S_3$,且$S_3-S_2-S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$,则$C=$ ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

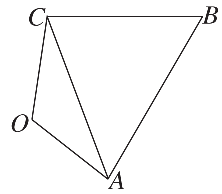
C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

**例 2** [2024·浙江温州高一期中] 已知$\triangle ABC$的内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$,且$\frac{\sqrt{3}a}{\sin A}+\frac{c}{\cos C}=0$.

(1)求角$C$的大小;

(2)若$b=4$,$D$是$AC$的中点,且$\sqrt{3}\sin\angle ABD=\sin\angle CBD$,求$\triangle ABC$的面积.

**变式** 如图,在四边形$OABC$中,$OA=OC=1$,$\angle AOC=120°$,$\angle ABC=60°$,则$\triangle ABC$的面积的最大值为 ( )




A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

**例 3** (1)[2024·山东实验中学高一月考] 在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$,且$2b=a+c$,若$\triangle ABC$的面积为$S$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}S$,则$\triangle ABC$的形状为 ( )

A. 钝角三角形　　B. 直角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

(2)在$\triangle ABC$中,内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$,且$\frac{2\cos A-\cos B}{\cos C+1}=\frac{b}{c}$.

(i)证明:$C=2A$;

(ii)记边$AB$和$BC$上的高分别为$h_c$和$h_a$,若$h_c:h_a=1:\sqrt{3}$,判断$\triangle ABC$的形状.

**变式**（多选题）在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，则下列说法中正确的是（　　）

A. 若$B=60°$，$b^2=ac$，则$\triangle ABC$一定是等边三角形

B. 若$\cos^2A+\cos^2B-\cos^2C>1$，则$\triangle ABC$一定是钝角三角形

C. 若$a-b=c(\cos B-\cos A)$，则$\triangle ABC$一定是等腰三角形

D. 若$a+b=\dfrac{a}{\tan A}+\dfrac{b}{\tan B}$，则$\triangle ABC$一定是直角三角形

## ◆ 题型二　三角恒等变换、平面向量与解三角形的综合问题

[类型总述] (1)将三角形中的线段用向量进行表示，利用向量解三角形；(2)三角恒等变换在解三角形中的应用.

### 角度1　正弦定理、余弦定理与平面向量的综合应用

**例4**（多选题）[2025·江苏苏州高一期中] 在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，$BC=4$，$\tan\angle ADC=\dfrac{2}{3}$，$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{13}$，则下列说法正确的有（　　）

A. $BD=3DC$

B. $AC=2$

C. $\triangle ABC$的面积为3

D. $\triangle ABC$的外接圆半径为$\sqrt{5}$

**变式** 已知$\triangle ABC$的内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，$A=\dfrac{\pi}{3}$.

(1)证明：$\sin B\sin C\leqslant\dfrac{3}{4}$；

(2)若$BC$边上的中线长为$\sqrt{3}$，求$bc$的最大值.

### 角度2　解三角形与三角恒等变换的综合问题

**例5** 在$\triangle ABC$中，$a,b,c$分别是内角$A,B,C$的对边，且$a\sin B-\sqrt{3}b\cos B\cos C=\sqrt{3}c\cos^2B$.

(1)求角$B$的大小；

(2)若角$B$的平分线与$AC$交于点$D$，$BD$的长为1，且$ac=2$，求$\triangle ABC$外接圆的面积；

(3)若$\triangle ABC$为锐角三角形，$c=1$，求$a+b$的取值范围.

**变式** [2024·广东华南师大附中高一期末] 已知$\triangle ABC$的内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$,且$b=2\sqrt{3}$,$2a-c=2b\cos C$.

(1)求角$B$的大小;

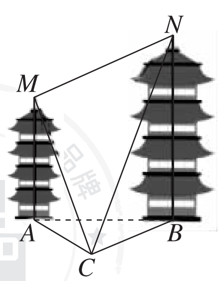
(2)若$a+c=4$,求$\triangle ABC$的面积;

(3)求$\triangle ABC$的周长的取值范围.

### ◆ 题型三 正弦定理与余弦定理的应用

[类型总述] (1)测量距离问题;(2)测量高度问题;(3)测量角度问题.

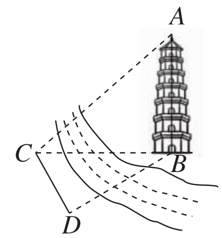
**例6** (1)[2025·贵州贵阳高一期末] 某数学建模活动小组在开展主题为"空中不可到达两点间的测距问题"的探究活动中,抽象并构建了如图所示的几何模型,该模型中$MA$,$NB$均与水平面$ABC$垂直,并已测得可直接到达的两点间距离$AC=3\text{ m}$,$BC=4\text{ m}$,在$C$处观测$M$的仰角为$45°$,观测$N$的仰角为$60°$,且$\angle MCN=45°$,则$M$与$N$之间的距离为 ( )




A. $2\sqrt{7}\text{ m}$　　B. $\sqrt{30}\text{ m}$

C. $4\sqrt{2}\text{ m}$　　D. $\sqrt{34}\text{ m}$

(2)[2025·福建福州高一期末] 如图,测量河对岸的塔高$AB$时,可以选与塔底$B$在同一水平面内的两个观测点$C$与$D$.现测得$\angle BCD=\alpha$,$\angle BDC=\beta$,$CD=m$,并在点$C$处测得塔顶$A$的仰角为$\theta$,则塔高$AB$为 ( )




A. $-\dfrac{m\cdot\tan\theta\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

B. $\dfrac{m\cdot\tan\theta\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

C. $\dfrac{m\cdot\tan\theta\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$

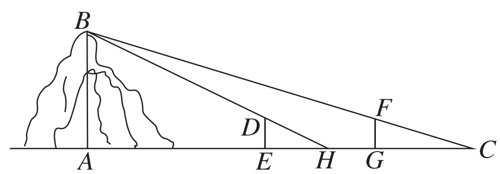
D. $\dfrac{m\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\tan\theta}$

(3)公路北侧有一幢楼高为60米,公路与楼底在同一水平面上.某人在点$A$处测得楼顶的仰角为$45°$,他在公路上自西向东行走,行走60米到点$B$处,测得仰角为$45°$,沿该方向再行走60米到点$C$处,测得仰角为$\theta$,则$\sin\theta=$ ( )

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 3

C. $-2$　　D. $-\dfrac{1}{3}$

**变式** (1)[2025·山东青岛高一期末] 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是有关测量的数学著作,其中第一道题目是测海岛的高.如图,点$E,H,G$在水平线$AC$上,$ED$和$GF$是两个垂直于水平面且等高的测量标杆.若$ED=GF=4$,$EG=15$,$EH=8$,$GC=13$,则海岛的高$AB$为 ( )




A. 16　　B. 24

C. 32　　D. 40

(2)[2025·山东淄博高一期中] 一艘海轮从$A$处出发,以每小时50海里的速度沿南偏东$40°$的方向航行,2小时后到达$B$处,在$C$处有一座灯塔,海轮上的工作人员在$A$处观察灯塔,其方向是南偏东$70°$,在$B$处观察灯塔,其方向是北偏东$65°$,那么$B,C$两点间的距离是 ( )

A. $50\sqrt{2}$海里　　B. $50\sqrt{3}$海里

C. $100\sqrt{3}$海里　　D. $100\sqrt{2}$海里